

Advanced Inorganic Chemistry



گروه

گروه مجموعه‌ای است که تعدادی عضو (عنصر) دارد و بین آنها روابط معینی برقرار است.

دانشگاه آزادوسی
مستطیلا پنجمسال اول
91-92

شرایط تشکیل گروه

شرط اول

نتیجه حاصل ضرب هر عضوی در عضو دیگر گروه و همچنین مجذور هر یک از اعضاء گروه، خود نیز باید متعلق به آن گروه باشد.

مثال

$$A \times B = C$$

$$B \times A = D$$

$$2 \times 3 = 6$$

$$3 \times 2 = 6$$

A و B عضو یک گروه باشد
در این صورت
C و D عضو همان گروه هستند

نکته: ضرب در گروه با ضرب در ریاضی فرق دارد

نکته: اگر

$$A \times B = C$$

$$B \times A = C$$

در این صورت به این گروه یک **گروه آبدلی** گفته می شود

شرط دوم

يك عضواين گروه بايد با ساير اعضا آن تعويض پذير باشد و تغييرى در آنها ندهد. اين عضو عنصر يكسانى ناپيده مى شود.

مثال

$$A \times E = E \times A = A$$

دانشگاه فردوسی
مشهد
نیم سال اول
۱۳۹۰-۹۱

دانشگاه فردوسی
مشهد
شرط سوم
نیم سال اول
۹۰-۹۱
در بین اعضاء گروه تبعیت از قانون شرکت پذیری ضرب حاکم باشد.



مثال



N

M



شرط چهار

هر عنصری از گروه باید وارونه خود را، که آن نیز طبقاً عضو گروه است، داشته

اگر F و ارون G باشد داریم:

مثال

$$FG = GF = E$$

دانشگاه فردوسی
مشهد
نیم سال اول
۱۳۹۰-۹۱

دارونه حاصل ضرب دو يا چند عنصر، با حاصل ضرب دارونه هر يك از آن عناصر با ترتيب معكوس برابر است

دانشگاه اوستا
مستوفی
نیم سال اول
۹۰-۹۱

مثال

$$ABCD = D^{-1}C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

نکته فوق را ثابت کنید

اثبات:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

اگر AB را مساوی C بگیریم و دو طرف معادله را در $B^{-1}A^{-1}$ ضرب کنیم می توانیم بنویسیم:

$$AB B^{-1}A^{-1} = C B^{-1}A^{-1}$$

$$AE A^{-1} = C B^{-1}A^{-1}$$

$$AA^{-1} = C B^{-1}A^{-1}$$

$$E = C B^{-1}A^{-1}$$

$$E = CC^{-1}$$

$$C^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(AB)^{-1} = C^{-1}$$

یعنی:

پس:

از طرفی داریم:

پس نتیجه می گیریم که: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ است.

تعداد اعضاء متشكله يك گروه معين، مرتبه آن ناميده مي شود كه به طور قراردادي با علامت h نشان داده مي شود و جدول ضرب يك گروه معين از h ردیف و h ستون تشكيل مي شود كه در آن ترتيب اعضاء در ردیفها، و همچنين در ستونها تكراري نخواهد بود بلكه هر ردیف يا هر ستوني داراي ترتيب جداگانه اي از اعضاء گروه است. در زير چند مثال از گرهها داده مي شود.

جدول ضرب گروه

جدول يك گروه مشخص از h ردیف و h ستون تشكيل مي شود

تعداد اعضاء اين گروه مشخص (جدول فوق) به طور قراردادي با نمايش داده مي شود

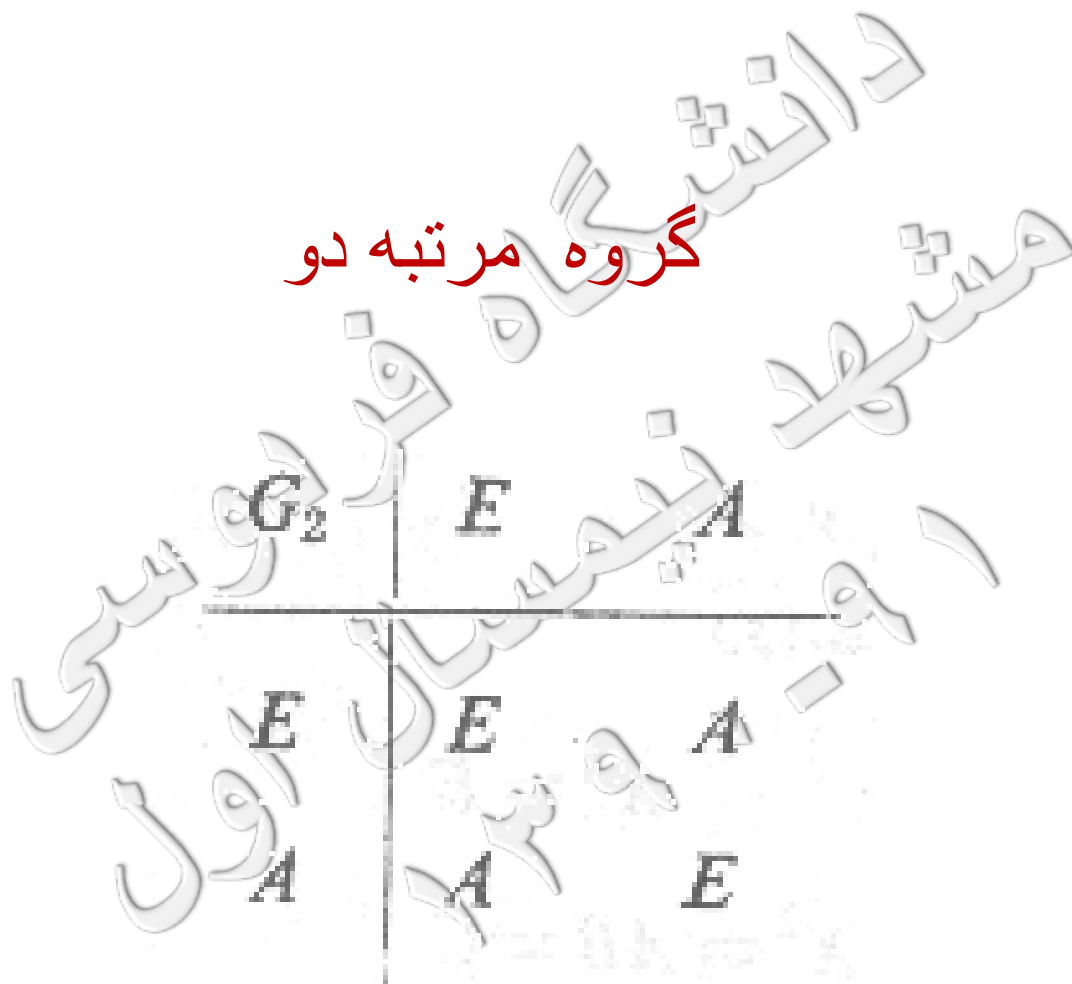
نکته : ترتيب اعضا در ردیف و ستون تكراري نيست

انواع گروه
دانشگاه فردوسی
مشهد نیمسال اول
۱۳۹۰-۹۱

دانشگاه فردوسی
مشهد
نیم سال اول
۹۰-۹۱
گروه مرتبه یک
E



گروه مرتبه دو



گروه حلقوی است

گروه مرتبه سه

G_3	E	A	B	
E	E	A	B	$X = A$ $X^2 = B$ $X^3 = E$
A	A	B	E	$X^2 = AA = B$ $A^2 = B$
B	B	E	A	$X^3 = XX^2 = AB = E$

گروه حلقوی است

نکته

در اینجا $AB = BA = E$ است. در صورتی که حاصل ضرب AA را مساوی E و حاصل ضرب BB را هم مساوی E قرار دهیم در این گروه دیگر از قاعده مربوط به تشکیل گروهها تبعیت نشده است زیرا در یکی از ستونها و همچنین در یکی از ردیفها يك عضو گروه دوبار تکرار شده است.

	E	A	B
E	E	A	B
A	A	E	A
B	B	A	E

یک گروه حلقوی از مرتبه n گروهی است که از عنصر X و کلیه توانهای آن تا $X^h = E$ تشکیل شده باشد. یک خصوصیت مهم گروههای حلقوی تعویض پذیر بودن آنهاست بدین معنی که:

$$X^m X^n = X^n X^m$$

بنابراین هر گروه حلقوی یک گروه آبدلی است.

گروه مرتبه چهار

این گروه چنانچه از يك عضو آن بقیه اعضا گروه تولید نمی شوند
از نوع گروههای جفتی است

G_4	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	B	C	E
B	B	C	E	A
C	C	E	A	B

$$X = A \quad X^2 = B \quad X^3 = C \quad X^4 = E$$

$$X^2 = A \cdot A = B \quad X^3 = X \cdot X^2 = AB = C$$

$$X^4 = X \cdot X^3 = AC = E \quad X^4 = X^2 \cdot X^2 = BB = E$$

$$X^5 = X \cdot X^4 = AE = A \quad X^5 = X^2 \cdot X^3 = BC = A$$

$$X^6 = X^2 \cdot X^4 = BE = B \quad X^6 = X^3 \cdot X^3 = CC = B$$

حال چنانچه در این گروه دو عضو آن مثلا A و B معکوس خود باشند عضو سوم هم خود به خود از رابطه $CC = E$ تبعیت می کند و چنین گروهی دیگر یک گروه حلقوی به شمار نمی آید ولی همان طور که ملاحظه می شود این گروه، یک گروه آبدلی می باشد.

G_4^2	E	A	B	C	
E	E	A	B	C	$AA = E$ $BB = E$ $CC = E$
A	A	E	C	B	$A(BC) = (AB)C$
B	B	C	E	A	$AA = CC$
C	C	B	A	E	$E = E$

دانشگاه فردوسی
گروه مرتبه پنجم
مشقلا نیمسال اول
۱۳۹۰-۹۱



$$X = A \quad X^2 = B \quad X^3 = C \quad X^4 = D \quad X^5 = E$$

$$X^2 = AA = A^2 = B \quad X^3 = A^3 = AA^2 = AB = C$$

$$X^4 = A^4 = A^2A^2 = BB = D \quad X^4 = A^4 = A \cdot A^3 = AC = D$$

$$X^5 = A^5 = AA^4 = AD = E \quad X^5 = A^5 = A^2A^3 = BC = E$$

$$X^6 = A^6 = A^2A^4 = BD = AA^5 = AE = A$$

$$X^6 = A^6 = A^3A^3 = CC = AA^5 = AE = A$$

$$X^7 = A^7 = A^3A^4 = CD = A^2A^5 = BE = B$$

$$X^8 = A^8 = A^4A^4 = DD = A^3A^5 = CE = C$$

در اینجا از قانون شرکت پذیری ضرب تبهیت شده است زیرا، برای مثال داریم:

پس نتیجه می گیریم که: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ است.

$$A(BC) = (AB)C$$

$$AE = CC$$

$$A = A$$

و جدول ضرب این گروه به صورت زیر است:

G_5	E	A	B	C	D
E	E	A	B	C	D
A	A	B	C	D	E
B	B	C	D	E	A
C	C	D	E	A	B
D	D	E	A	B	C

دانشگاه فردوسی
مرتبہ شش
مشق نیمسال اول
۱۳۹۰-۹۱

گروه آبلی نیست

G_6^1	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	E	D	F	B	C
B	B	F	E	D	C	A
C	C	D	F	E	A	B
D	D	C	A	B	F	E
F	F	B	C	A	E	D

AA=E BB=E CC=E DD=E ~~DD=E~~ FF=E
~~DF=E~~ ~~FD=E~~

جدول دارای عنصر تکراری می شود

گروه حلقوی است

G_6^2	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	B	C	D	F	E
B	B	C	D	F	E	A
C	C	D	F	E	A	B
D	D	F	E	A	B	C
F	F	E	A	B	C	D

$$\begin{array}{lll}
 X = A & X^2 = A^2 = B & X^3 = AA^2 = AB = C \\
 X^4 = A^2A^2 = BB = D & X^4 = AA^3 = AC = D & \\
 X^5 = AA^4 = AD = E & X^5 = A^2 \cdot A^3 = BC = F & \\
 X^6 = AA^5 = AF = E & X^6 = A^2A^4 = BD = E & \\
 X^6 = A^3A^3 = CC = E & X^7 = X \cdot X^6 = AE = A & \\
 X^7 = X^2 \cdot X^5 = BF = A & X^7 = X^3 \cdot X^4 = CD = A &
 \end{array}$$

زیر گروه

گروه های کوچکتری در درون یک گروه وجود دارند را زیر گروه می گویند

زیر گروه تمام مشخصات یک گروه را دارا می باشد
مرتبه زیر گروه با g نمایش داده می شود

زیر گروه بدیهی: خود گروه (تمام اعضا) و $\{E\}$ (یک عضو)

عمل مشابهتی

اگر A و X هر دو عضوی از یک گروه باشند داریم

$$B = X^{-1}AA^{-1}$$

A و B را مزدوج می گویند

B تبدیل مشابهتی A بوسیله X است

خصوصیات مزدوج ها

۱ هر عضوی با خودش مزدوج است.

اگر A عضوی از یک گروه باشند حداقل عضو X ی داریم که

$$A = X^{-1}AX$$

دو طرف را در A^{-1} ضرب می کنیم

$$A^{-1}A = E = A^{-1}X^{-1}AX = (XA)^{-1}(AX)$$

۲ چنانچه A مزدوج B باشد، B هم مزدوج A خواهد بود.

اگر A عضوی از یک گروه باشند حداقل عضو X ی داریم که

$$A = X^{-1}BX$$

حداقل عضو Y ی داریم

$$B = Y^{-1}BY$$

اثبات

$$XAX^{-1} = XX^{-1}BXX^{-1} = B$$

اگر $Y = X^{-1}$ و $Y^{-1} = X$ باشد داریم

$$B = Y^{-1}AY$$

در گروه عضو X وارون خود Y را دارد

۳ چنانچه A با B و C مزدوج باشد، در آن صورت B و C هم مزدوج یکدیگر خواهند بود.

طبقه

اعضای یک گروه را می توان به صورت مجموعه های کوچکتری که طبقه (کلاس) نامیده می شوند دسته بندی کرد.

یک مجموعه کامل از اعضای یک گروه که مزدوج یکدیگرند را ، یک طبقه یا کلاس می گویند



سوال

طبقه های G_6^1 را تعیین نمایید

G_6^1	<i>E</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>F</i>
<i>E</i>	<i>E</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>F</i>
<i>A</i>	<i>A</i>	<i>E</i>	<i>D</i>	<i>F</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
<i>B</i>	<i>B</i>	<i>F</i>	<i>E</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>
<i>C</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>F</i>	<i>E</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
<i>D</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>F</i>	<i>E</i>
<i>F</i>	<i>F</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>E</i>	<i>D</i>

سوال

طبقه های G_6^1 را تعیین نمایید

$$E^{-1}EE = EEE = E$$

$$A^{-1}EA = A^{-1}AE = E$$

$$B^{-1}EB = B^{-1}BE = E$$

$$C^{-1}EC = C^{-1}CE = E$$

$$D^{-1}ED = D^{-1}DE = FDE = E$$

$$F^{-1}EF = F^{-1}FE = DFE = E$$

۱- مزدوج های E تعیین گردد

پس E یک طبقه است. (مرتبۀ ۱)

۲- مزدوج های A تعیین گردد

$$E^{-1}AE = EAE = A$$

$$A^{-1}AA = AAA = EA = A$$

$$B^{-1}AB = BAB = C$$

$$C^{-1}AC = CAC = B$$

$$D^{-1}AD = FAD = B$$

$$F^{-1}AF = DAF = C$$

پس A ، B و C به یک طبقه است. (مزدوج) (مرتبه ۳)

۳- مزدوج های D تعیین گردد (چون در تعیین A توانستیم B و C را بدست آوریم دیگر محاسبه نمی گردد)

$$E^{-1}DE = EDE = D$$

$$A^{-1}DA = ADA = F$$

$$B^{-1}DB = BDB = F$$

$$C^{-1}DC = CDC = F$$

$$D^{-1}DD = FDD = D$$

$$F^{-1}DF = DDF = D$$

پس D و F به یک طبقه است. (مزدوج) (مرتبه ۲)